

1.

Formiranje pojmova i njihovo ikoničko i simboličko predstavljanje

Danas se uzima da čovekovo znanje potiče iz osnove koju predstavlja čulno iskustvo i da sve daljim procesiranjem tog iskustva, dolazi se do najvišeg nivoa mišljenja koje nazivamo mišljenje u pojmovima. Prema klasičnoj Aristotelovskoj klasifikaciji, čovek ima pet čula među kojima je oko kao čulo vida, najdominantnije. Oko vidi objekte spoljnog sveta koji emituju ili reflektuju svetlost, pa mehanizam funkcionisanja tog čula, isključujući prateću funkciju mozga, možemo uporediti sa funkcijom fotografske kamere. Ali te dve funkcije, oka i mozga, ne treba razdvajati kad govorimo o vizuelnoj percepciji, za koju možemo istaći sledeća dva principa:

1. Usmeravanje pažnje na objekat koji se sagledava i potiskivanje u pozadinu (background) svega drugog što se tom prilikom može videti.

2. Postojanje tendencije da se “loši” objekti vide kao “dobri” (Law of Pragnantz), tj. tendencije da se zanemaruje izvesna nepravilnost, nekompletnost i neuravnoteženost objekta koji se vidi i uspostavi pravilnost, kompletnost i uravnoteženost u rezultatu njegovog sagledavanja.

Podvodeći sve te promenljive ali srodne utiske o objektima spoljnog sveta pod jedno, u našoj svesti se formira ideja o obliku predmeta, pa oblike možemo smatrati čovekovim primarnim pojmovima.

Kao odrazi predmeta koje vidimo pojavljuju se na retini (dvodimenzione) slike, pa se prirodno pitamo kako mozak interpretira te odraze sa dubinom, tj. kako to da trodimenziono vidimo. Postoji više ključeva dubinskog sagledavanja i njih delimo na monokularne: perspektiva, preklapanje, osenčenost, zamućenost, dok je binokularni ključ retinalni disparitet koji shematski predstavljamo u vidu da Vinci-jevog diagrama.

Napominjemo da će slike i primeri koji prate ovo i sledeća naša izlaganja biti projektovani u toku samih predavanja.

Vidimo da vizuelna percepcija nije puko gledanje nego je, nerazdvojivo od toga, i interpretiranje onog što vidimo. A kad stepen prerade čulnog iskustva ide dotle da se ono još kodifikuje putem jezika, tada nastaju pojmovi kao osnovni blokovi koji izgrađuju refleksivno mišljenje. Pa, sad se osvrnimo na pitanje, a šta su pojmovi.

Govoreći o pojmu stola, Platon kaže:”Bog je stvorio arhetip stola, stolar pravi njegovo materijalno obličjenje, a slikar pravi obličjenje tog obličjenja”. Kao što to znamo iz klasične logike, Aristotel je bio mnogo racionalniji gledajući na pojmove kao na dijadu koju čine *genus proximum* i *differentia specifica*. Ovo gledanje sasvim odgovra u onim slučajevima kad pojmove određujemo definicijama, ali ne i kad se radi o spontanim pojmovima ili pojmovima u matematici, koje uzimamo kao polazne.

Pojmovi tretirani na savremeni način vide se kao trojke koje čine: odgovarajuća (za dati pojam) *klasa primera*, *unutrašnja mentalna predstava* i *jezički kod* (reč ili simbol kojima se pojam označava). (shema koja predstavlja ove trojke i primeri biće projektovani u toku predavanja).

Kad pojmove shvatamo na ovaj način tada možemo uspostaviti njihovu hijerarhiju po opštosti, naime uzimamo da je neki pojam P *opštiji* od nekog drugog pojma Q, ako se Q može smatrati primerom za P. Na primer, broj “tri”, prirodni broj, celi broj, racionalni broj, realni broj, čine jedan niz sve opštijih pojmova, a u matematici imamo mnogo takvih nizova.

Na osnovu ove hijerarhije na definicije možemo gledati kao na rečenice tipa: *Q* je *P* plus *differentia spacifica*, a gde je, naravno, *P* pojam višeg stepena opštosti od pojma *Q* koji definišemo. Svi mi koji predajemo matematiku moramo ovu činjenicu uzeti kao otrežnjavajuću i sagledati da usvajanje pojmova teče kroz “rad sa njima” (R. Thom), a ne putem definicija.

U klasičnoj logici *conceptus summum* je pojam većeg stepena opštosti od čitave klase drugih pojmova. Od druge polovine 19-og veka takvu ulogu u matematici ima pojam skupa, koji je opštiji od svih drugih pojmova klasične matematike. Zato se značenje ovog pojma razvija kroz dugi obrazovni period, počev sa primerima koji su vidljive kolekcije objekata realnog sveta pa do, recimo, primera skupova gde su elementi čitave klase ekvivalencije kao, na primer, kad definišemo kvocijentne grupe.

Formiranje pojmova počinje izdvajanjem odgovarajućih primera, odvija se dalje procesiranjem utisaka stečenih u kontaktu sa tim primerima putem čega se u svesti formira mentalna predstava. Ova predstava nije prosti zbir tih utisaka, nego se sastoji od bitnih karakteristika sadržanih u svim tim pojedinačnim utiscima. Zatim se pojam označava putem reči koja služi kao njegova oznaka. Misleći, mi ne operišemo sa pojmovima nego sa njihovim oznakama koje klasifikujemo kao ikoničke i simboličke.

Kod određene vrste pojmova (kakvi su u početnoj nastavi matematike ili u elementarnoj geometriji) mentalne predstave možemo dobro da realizujemo u vidu slika (na grčkom ikona) koje uspešno integrišu sva bitna svojstva karakteristična za neki pojam. Na primer, sa tri tačke dobro realizujemo našu unutrašnju predstavu o broju “tri” ili predstavu o kružnoj liniji kad je realizujemo koristeći se šestarom. Te slike-crteži su vrsta znakova kojima predstavljamo pojmove ikonički. Iako se takvi znaci ne mogu potpuno poistovetiti sa odgovarajućom mentalnom predstavom, oni su u velikoj meri očešćeni od šuma, tj. svojstava koja su za taj pojam nebitna. Ikoničko predstavljanje igra značajnu ulogu u procesu učenja matematike i to ne samo na školskom nivou. Ovo predstavljanje podleže jednom važnom pravilu: *Ikonički znaci realizovani na različitim mestima jesu različiti*. Nepoštovanje ovog pravila dovodi do konfuzija često vidljivih u udžbenicima matematike.

U znakove koji služe simboličkom predstavljanju pojmova spadaju (pisane ili izgovorene) reči prirodnog jezika. A u matematici, kao zamenu za reči, imamo konvencionalne simbole kojima se označavaju pojmovi.

Dok je oblik ikoničkih znakova bitan za njihovu ulogu značećih simbola, dotle oblik konvencionalnih simbola isključivo služi za njihovo prepoznavanje i razlikovanje.

2.

Izgradnja brojevnih sistema

„Spoznaja da dva oka, dva čoveka koji se kreću jedan pored drugog i dva vesla uz neki čamac imaju nešto zajedničko što se izražava rečju „dva“ bio je veliki korak u logičkom razvoju čoveka“ (I. R. Šafarevič). Ideje o prirodnim brojevima razvile su se u okviru prvobitnih civilizacija pre perioda nastanka pisma, a dvojina u našem jeziku i promena padeža kod brojanja do pet i od pet dalje, jasno svedoči o postojanju brojevnih sistema samo do dva, odnosno samo do pet, kod nekih naših dalekih slovenskih predaka. U svakom slučaju ideje o prirodnim brojevima čovek je razvijao u kontaktu sa diskretnim realnostima, a taj generativni proces mi danas formulišemo kao *Kantorov kognitivni princip*: Polazeći od nekog skupa objekata u opažajnom polju i apstrahujući (zanemarujući) njihovu prirodu i svaki vid organizovanosti (uredjenje, način grupisanja itd.) dolazimo do čiste ideje broja.

Kombinovanjem sa raznim sistemima oznaka, već u drevnim civilizacijama sa razvijenim pismom, razvila se i apstraktna ideja o prirodnom broju, a uvođenjem mernih jedinica, ljudi iz tih epoha transponovali su merljive stvari na skale, pa su odnose prema mernim jedinicama izražavali odnosima dva prirodna broja. Pitagorejska „dogma“ – „sve je broj“ bila je vladajući princip za čoveka tog doba u njegovom racionalnom odnosu prema okružujućoj realnosti. I to je trajalo sve dotle dok nije (nesrećni) Hipasus iz Megaponta otkrio prvi iracionalni broj. Važno je da napomenemo da nikakva merenja objekata realnog sveta ne vode takvom jednom otkriću. Ono je vezano za idealne objekte – geometrijske figure apstraktno shvaćene i postupke poredjenja (merenja) prenešene na njih.

(Projektovaćemo Hipasus-ov dokaz koji ima geometrijsku formu, i Aristotelov o neegzistenciji prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost $m^2 = 2n^2$).

Dalji tok je vodio geometrizaciji teorije prirodnih brojeva, a to iz Euklidovih *Elemenata* znamo kao Eudoksovu teoriju razmera. U okviru ove teorije nisu se mogle razviti četiri osnovne operacije sa brojevima, a sabiranje magnituda imalo je smisao konstruisanja i združivanja raznih geometrijskih objekata, koje je bilo praćeno sputavajućim zahtevom o istorodnosti (uslov homogenosti) koji je još prisutan u Vietovoj slovnjoj algebri.

Revolucionarni korak u razvoju (geometrijske) teorije realnih brojeva napravio je Dekart uvodeći pojam jedinične duži i formirajući model u kome je nosilac značenja realnog broja svaka duž pojedinačno, fiksirana jednim krajem za tačku na pravoj. U okviru tog modela, operacije sa dužima su vezane za jednostavne konstrukcije, a što je najvažnije, njihovi rezultati su opet duži.

(Uz projekcije slede za ovo vezani detalji).

Motivisan potrebom logičkog zasnivanja kalkulusa, dalji razvoj teorije realnih brojeva išao je u samostalno (a ne na geometriju oslonjeno) zasnivanje te teorije – Dedekind, Kantor itd. U međuvremenu sistem oznaka se razvio osmišljavanjem beskonačnih decimalnih razlomaka, pa navedimo da je kao rezultat izvesne nemarnosti za preciznost, tek 1886. godine O. Stoltz bio prvi koji je pokazao da se svaki iracionalni broj može predstaviti u vidu beskonačnog neperiodičnog razlomka i da je to svojstvo karakteristično za iracionalne brojeve.

U drevnim vremenima računalo se samo sa racionalnim brojevima (celim i razlomcima), a i danas svaki numerički račun izvodi se sa „malim“ racionalnim brojevima (jer je desetak decimala dovoljno za većinu praktičnih potreba). Pa, ako su racionalni brojevi dovoljni za sve potrebe računanja, čemu nam onda služe realni brojevi. Usudimo se da kažemo da je pravi odgovor na ovo pitanje, da je čovek osmišljavanjem i preciznim logičkim određivanjem sistema realnih brojeva stvorio osnovu za analitičko izražavanje svojih predstava o prostoru i vremenu. Koristeći matematičke termine, to bi između ostalog značilo da bez te osnove mnogi naši pojmovi kao što su limes, izvod, integral, diferencijalna ili parcijalna jednačina ne bi imali smisla, niti bi imali smisla mnogi fundamentalni zakoni prirodnih nauka koji se u tim terminima izražavaju.

Brojevi su centralna tema nastave matematike. A mesto gde moramo biti najkritičniji je način uvođenja iracionalnih brojeva. Formalisti će biti vrlo zadovoljni da kažu da je za pozitivni broj a , koren iz a pozitivno rešenje jednačine $x^2 = a$, a da ništa ne kažu o tome šta je proizvod $x \cdot x$, niti da se brinu oko toga da li takvo rešenje zbilja postoji. Ili, oni će se latiti Stoltz-ove karakterizacije iracionalnih brojeva iako u tome kao početnom koraku, nema puno smisla. Bez potpunije didaktičke razrade pomenutog Dekartovog geometrijskog modela ne može se izbeći isprazni formalizam.

(Projektuje se deskripcija Dekartovog modela).

3.

Promenljiva kao ključna ideja algebre

Grčki matematičar Diofant (IV v. po Hr.) skraćuje reč "gomila", koja je u retoričkoj algebri označavala nepoznatu i umesto nje piše slovo ζ (krajnje u grčkoj reči gomila) da njime označi nepoznatu. To je prvi korak ka simboličkoj algebri, ali pravi početak bila je Vietova *logistica speciosa*. Naime, Viet označava nepoznate koristeći velika slova kojima se pišu samoglasnici, dok konstante označava takvim slovima za suglasnike. Sve ostalo sem reči za „plus“ i „minus“ ostaje u vidu retoričke algebre, a operacije i dalje imaju smisao manipulisanja sa magnitudama. Sama reč „specia“ upućuje na to da Viet pod njom podrazumeva čitave "vrste" (klase) brojeva, a ne pojedinačne brojeve, kako je to do tada bila utemeljena navika. Rečeno savremenim jezikom on svesno operiše sa promenljivim bez mogućnosti da u to vreme, ima za to i odgovarajuće utemeljenje. I pored efektnih primena ove slovne algebre na rešavanje geometrijskih problema (Viet i njegov učenik Marin Getaldić), ovaj dinamički pogled nije se mogao utemeljiti na stacionarnom stanju grčke geometrije, pa je bio osporavan od autoriteta tog vremena (Paskal i dr.). Pa kao što to često biva sa dostignućima u matematici, da bi postali opšte poznati i prihvaćeni, moralo se nešto spektakularno desiti. Kad su Galilejevi savremenici izrazili njegov zakon vertikalnog hica simbolički i kad je jedna takva „šara“ sadržavala sve – visinu do koje će projektil dospeti, vreme kad će se vratiti nazad na tle, sve rezerve su pale a simbolička algebra krenula je u dalji pohod (uvođenje znakova za množenje i deljenje, znaka jednakosti, znakova za manje i više, oznaka za stepene i korene), da bi već početkom XVII stoleća slovna algebra postala takva kakvu je mi danas znamo. Ali ta grana matematike bila je oslonjena na razne interpretacije (prevashodno geometrijske), ostajući bez svog sopstvenog logičkog utemeljenja.

Tek oko 1830. godine, engleski matematičar Džordž Piko (George Peacock) napada problem zasnivanja simboličke algebre, što bi dalo legitimitet operisanju sa slovima i slovnim izrazima. Praveći razliku između aritmetičke algebre i simboličke algebre i primenjujući svoj *princip permanencije forme*, on prevodi tačne relacije iz aritmetike, putem zamene posebnih brojeva slovima, u prihvatljive aksiome algebre.

(Detalji za razumevanje ovog posrupka biće takođe izloženi).

Tako je algebra, poput geometrije mnogo ranije, dobila svoje sopstvene aksiome koje su kroz proces prečišćavanja u toku XIX veka, izdvojile se u sistem koji znamo kao aksiome uređenog polja. Napomenimo da su, reduciranjem ovog sistema, nastale razne algebarske strukture kojima savremena matematika obiluje.

Već smo rekli koliko se spektakularno dojmila analitička veza između dve promenljive veličine – vremena i visine projektila u slučaju vertikalnog hitca. Od tada je razvoj matematike snažno krenuo tim putem iz čega nastaje analitička geometrija, kalkulus, analitička mehanika i sve ono što danas čini matematiku i gde su funkcije i operacije sa njima u biti takvih sadržaja.

Nebuloze u vidu definicije promenljive dopiru čak do našeg vremena, a da to nije bilo lako uraditi pre vremena opšteg jezika teorije skupova, svdoči „definicija“ koja se može naći u čuvenom Košijevom kursu analize.

Danas o promenljivoj govorimo kao uređenom paru (S,x) , gde je S neki neprazni skup a slovo x označava (ne jedan nego) bilo koji element skupa S . Tada kažemo da je x *promenljiva u S* , a S *univerzalni skup promenljive x* . Frivolno je insistirati, iako je to logički ispravno, da S može biti bilo koji neprazni skup. Od toga je važnije navesti

primere nekih značajnih univerzalnih skupova: N (skup prirodnih brojeva), Q (skup racionalnih brojeva), R (skup realnih brojeva), C (skup kompleksnih brojeva), itd, i, redom, uobičajene oznake za promenljive: n, q, x, z , itd.

(Izlaganje se nastavlja pričom kad i kako počinjemo da u nastavi matematike osmišljavamo ideju o promenljivoj i formiramo veze među promenljivim (proporcije, sastavljanje zakona pridruživanja, itd.)).

4.

Razvoj pojma skupa (kroz nastavu matematike)

Već smo govorili o tome da je pojam skupa najopštiji u odnosu na sve druge pojmove klasične matematike. Samim tim taj pojam se ne definiše, a njegovo značenje asimiluje se kroz sve vidove njegovog korišćenja. U kojoj meri primeri skupova mogu biti sve apstraktniji zavisice od prirode njihovih elemenata. Kad su elementi objekti koji se opažaju, govorimo o pojmu skupa na senzornom (opažajnom) nivou. A i u ovom slučaju treba razlikovati dva stepena apstraktnosti – kad su elementi objekti realnog sveta (jednaki sami sebi bez obzira na mesto gde se nalaze) i kad su objekti ikonički znaci (različiti čim se nalaze na različitim mestima). Nerazlikovanje ova dva slučaja vodi do konfuznih situacija koje su posledica previda da sa ikoničkim znacima ne možemo manipulirati kao što to radimo sa objektima realnog sveta. U udžbenicima se mogu često naći takvi varvarizmi, a mi ćemo navesti neke tipične primere. Naravno da na ovom nivou ne treba koristiti nikakve skupovne simbole, nego iskazivati zahteve prirodnim jezikom koristeći reči koje imaju funkciju retoričkih varijabli.

Sledeći nivo predstavlja slučaj kad su elementi konvencionalni simboli (slova, brojevi i dr.). Tada se sa smislom mogu uvesti oznake teorije skupova, skupovne operacije i relacije. Pošto je svaki skup jednak samo samom sebi, skupovne jednakosti izražavaju jednačjenje moguće različitih oznaka za jedan te isti skup. (Navešćemo primere i govoriti o kanoničkim (standardnim) oznakama).

Treći nivo počinje sa označavanjem skupova na sledeći način

$$\{ x: p(x) \}$$

gde je x promenljiva čiji je univerzalni skup S , a $p(x)$ je propoziciona funkcija definisana na nepraznom podskupu D skupa S . Tad gornja oznaka dređuje skup A koji čine sve vrednosti a promenljive x za koje je $p(a)$ tačna propozicija. Napomenimo da skup A može biti prazan ali ne i skup D (jer nikad ne radimo sa uslovima koji su besmisleni).

(Dalje navodimo konkretne primere i potenciramo vezu: $A - p(x)$, tj. paralelizam između teorije skupova i logike).

5.

Logika kroz konkretne sadržaje matematike

(Ako stignemo da govorimo i o ovoj temi, njen kratki sadržaj se nalazi u mom članku u zadnjem (jubilaranom) broju Nastave Matematike).